

CHAPITRE III :

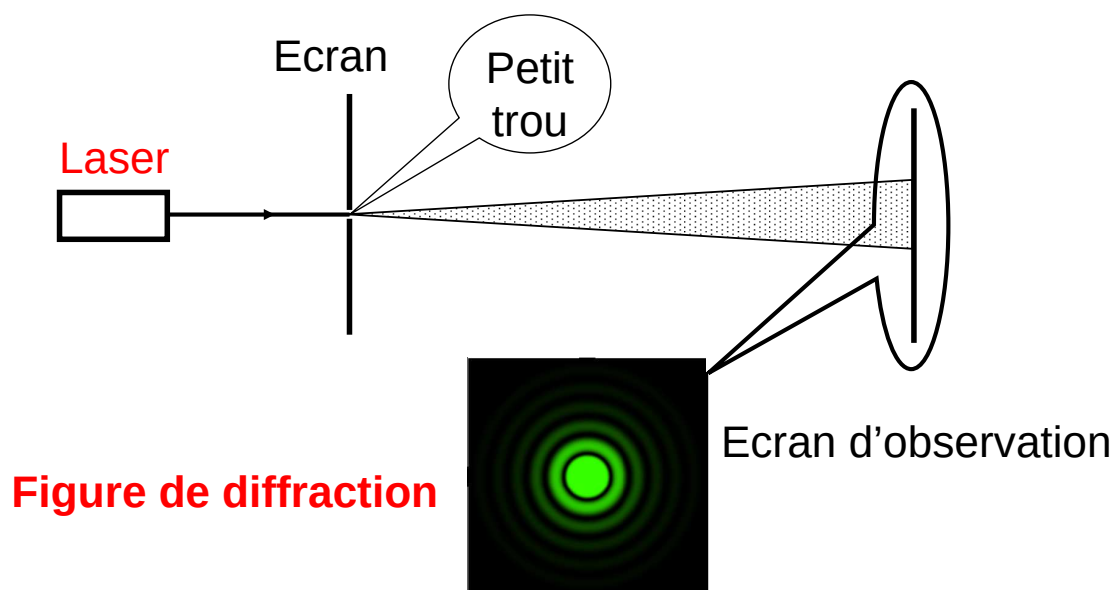
La diffraction lumineuse

03/01/2009

Optique 2 : E. Ech-chamikh

1

I. Introduction



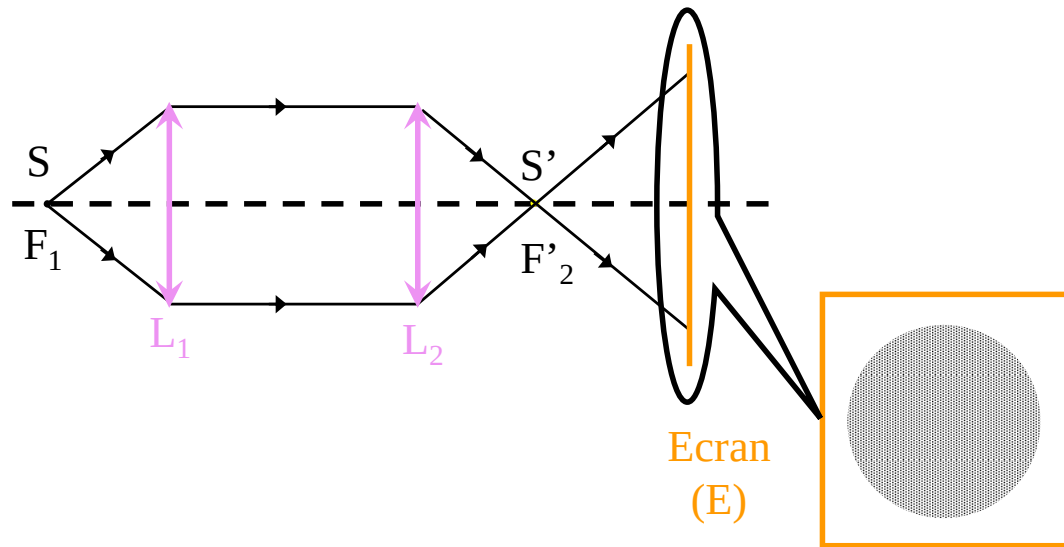
03/01/2009

Optique 2 : E. Ech-chamikh

2

II. Mise en évidence de la diffraction

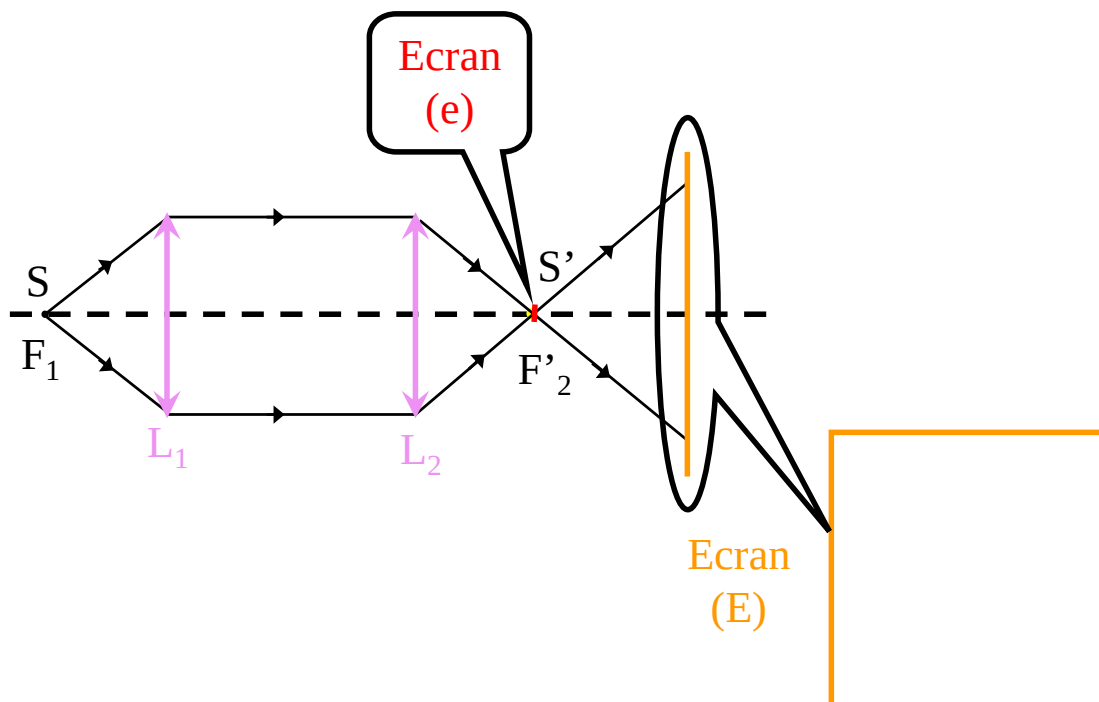
(expérience de strioscopie)



03/01/2009

Optique 2 : E. Ech-chamikh

3

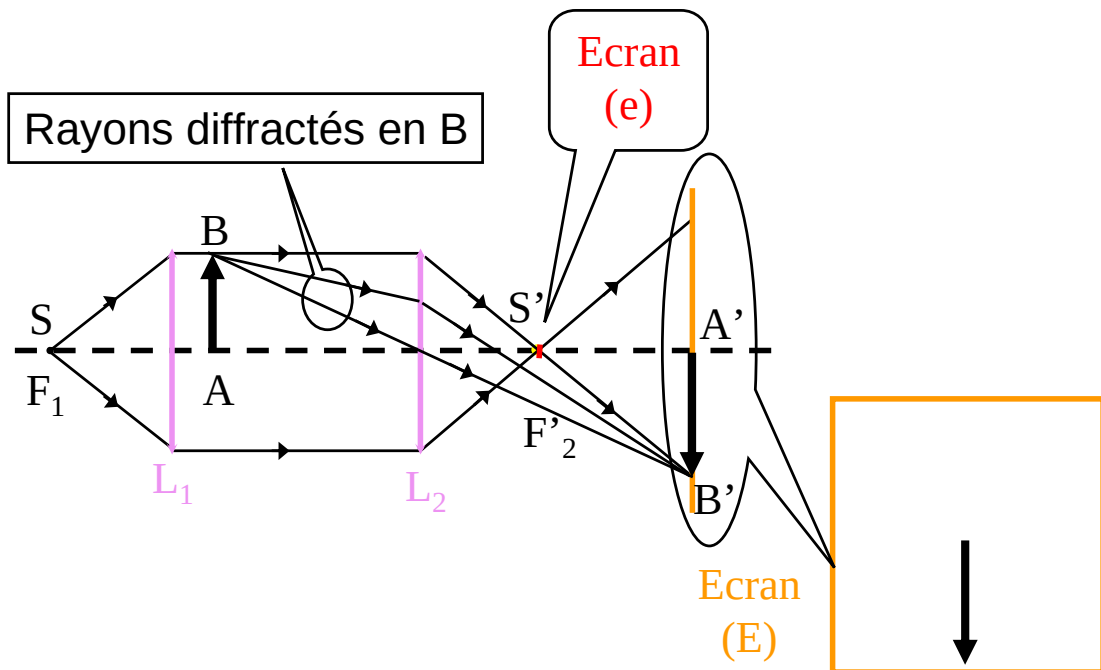


L'écran « e » masque tous les rayons issus de S'

03/01/2009

Optique 2 : E. Ech-chamikh

4



Les rayons diffractés ne sont pas masqués par e et forment donc l'image A'B' de l'objet AB

III. Etude théorique de la diffraction par une ouverture

III. 1. Principe d'Huygens-Fresnel

Principe d'Huygens

Tout **élément ds** atteint par une onde **se comporte comme une source** dite secondaire

Postulats de Fresnel

- L'**amplitude** de l'onde émise par ds est **proportionnelle à ds**
- La **phase** de l'onde émise par ds est **celle de l'onde source lorsqu'elle atteint ds**

III. 2. Diffractions de Fresnel et de Fraunhofer

Diffraction de Fresnel

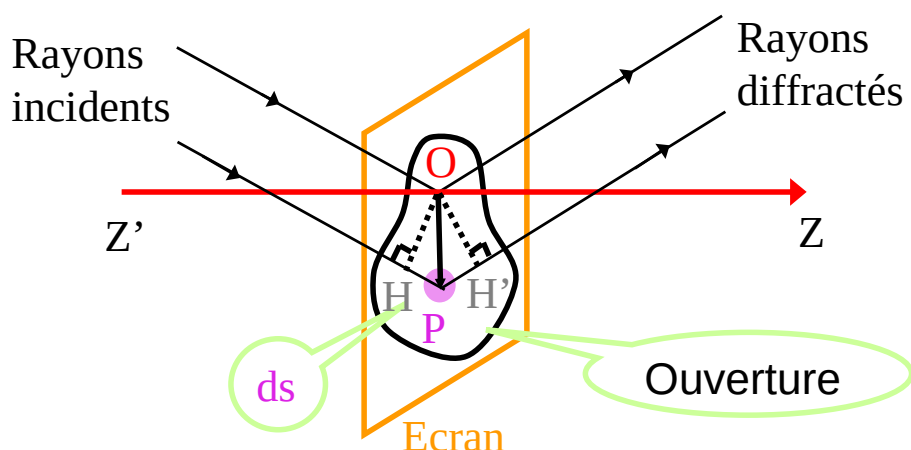
La source et l'écran d'observation sont **proches** de l'objet diffractant (**calculs compliqués**)

Diffraction de Fraunhofer

La source et l'écran d'observation sont **très éloignés** de l'objet diffractant (**calculs relativement simples**)

Dans toute la suite on va s'intéresser au cas simple : **diffraction de Fraunhofer**

III. 3. Diffraction par une ouverture plane

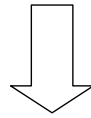


O : Origine

ds : élément de surface (de centre **P**) de l'ouverture

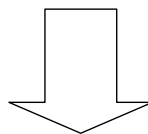
Principe d'Huygens-Fresnel $\Rightarrow \overline{ds} = A ds e^{j\varphi}$

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi(HP + PH')}{\lambda} = \frac{2\pi(\overrightarrow{OP}\vec{u} - \overrightarrow{OP}\vec{u}')}{\lambda} \\ &= \frac{2\pi\overrightarrow{OP}(\vec{u} - \vec{u}')}{\lambda} = \frac{2\pi \vec{r}(\vec{u} - \vec{u}')}{\lambda} \end{aligned}$$



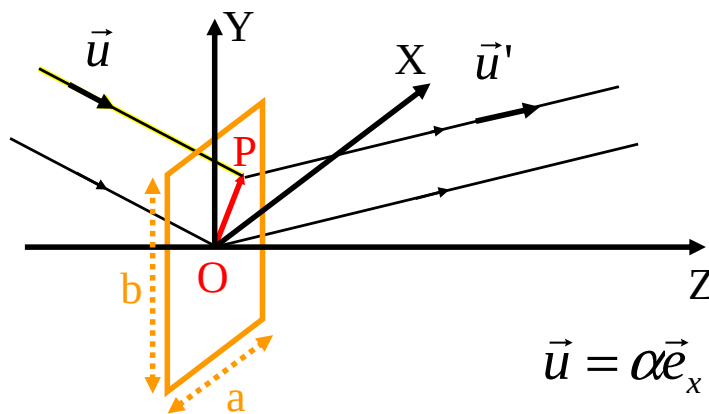
$$\overline{ds} = A ds e^{j\frac{2\pi \vec{r}(\vec{u} - \vec{u}')}{\lambda}}$$

$$\begin{aligned} \overline{S} &= \iint_{\text{ouverture}} \overline{ds} = \iint_{\text{ouverture}} A ds e^{j\frac{2\pi \vec{r}(\vec{u} - \vec{u}')}{\lambda}} = A \overline{Z} \\ \text{avec} \quad \overline{Z} &= \iint_{\text{ouverture}} e^{j\frac{2\pi \vec{r}(\vec{u} - \vec{u}')}{\lambda}} ds \end{aligned}$$



$$I = \overline{S} \overline{S}^* = A^2 \overline{Z} \overline{Z}^*$$

III. 4. Diffraction par une ouverture rectangulaire



$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

$$ds = dx dy$$

$$\vec{u} = \alpha\vec{e}_x + \beta\vec{e}_y + \gamma\vec{e}_z$$

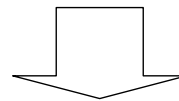
$$\vec{u}' = \alpha'\vec{e}_x + \beta'\vec{e}_y + \gamma'\vec{e}_z$$

$$\bar{z} = \iint_{\text{ouverture}} e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \vec{r}(\vec{u} - \vec{u}')} ds$$

$$\vec{r}(\vec{u} - \vec{u}') = x(\alpha - \alpha') + y(\beta - \beta')$$

$$\vec{r}(\vec{u} - \vec{u}') = x(\alpha - \alpha') + y(\beta - \beta')$$

$$ds = dx dy$$



$$\begin{aligned} \bar{z} &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{j\frac{2\pi}{\lambda} (x(\alpha - \alpha') + y(\beta - \beta'))} dx dy \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{j\frac{2\pi}{\lambda} (x(\alpha - \alpha') + y(\beta - \beta'))} dy \right) dx \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{j\frac{2\pi}{\lambda} x(\alpha - \alpha')} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{j\frac{2\pi}{\lambda} y(\beta - \beta')} dy \end{aligned}$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{j \frac{2\pi x}{\lambda} (\alpha - \alpha')} dx = \left[\frac{e^{j \frac{2\pi x}{\lambda} (\alpha - \alpha')}}{j \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha - \alpha')} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{e^{j \frac{\pi a}{\lambda} (\alpha - \alpha')} - e^{-j \frac{\pi a}{\lambda} (\alpha - \alpha')}}{j \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha - \alpha')}$$

$$= a \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} (\alpha - \alpha')\right)}{\frac{\pi a}{\lambda} (\alpha - \alpha')}$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{j \frac{2\pi y}{\lambda} (\beta - \beta')} dy = b \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} (\beta - \beta')\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} (\beta - \beta')}$$

$$\bar{z} = ab \left(\frac{\sin u}{u} \right) \left(\frac{\sin v}{v} \right) \quad \text{avec: } u = \frac{\pi a}{\lambda} (\alpha - \alpha') \quad \text{et } v = \frac{\pi b}{\lambda} (\beta - \beta')$$

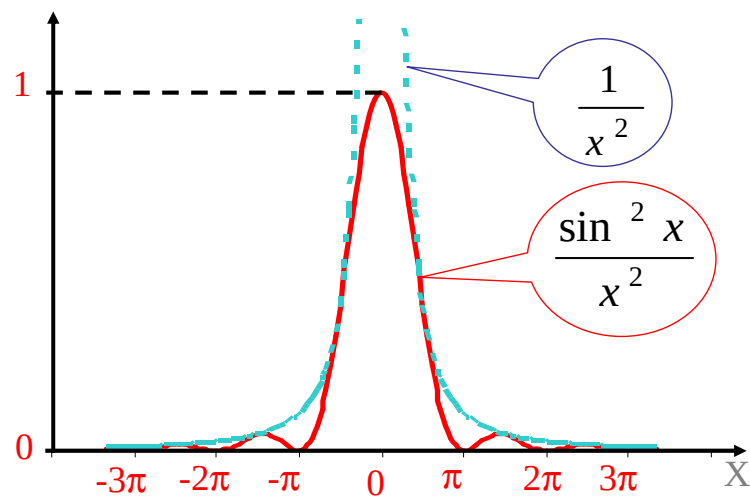
$$I = A^2 \bar{z} \bar{z}^* = A^2 a^2 b^2 \left(\frac{\sin^2 u}{u^2} \right) \left(\frac{\sin^2 v}{v^2} \right)$$

$$= I_0 \left(\frac{\sin^2 u}{u^2} \right) \left(\frac{\sin^2 v}{v^2} \right)$$

$$\text{avec: } I_0 = A^2 a^2 b^2 \quad \text{Intensité de la tache centrale}$$

$$u = v = 0 \Leftrightarrow (\alpha = \alpha' \quad \text{et} \quad \beta = \beta') \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{u}'$$

$$\alpha = \alpha' \quad \text{et} \quad \beta = \beta' \Rightarrow I = I_0 \text{ (maximum principal)}$$



X	$\pm 1.43\pi$	$\pm 2.46\pi$	$\pm 3.47\pi$	$\pm 4.48\pi$	$\pm 5.48\pi$	$\pm 6.49\pi$	$\pm 7.49\pi$
$\frac{\sin^2 x}{x^2}$	0.047	0.016	0.008	0.005	0.003	0.0024	0.0018

$$\left(u = 0 \text{ et } v = \pm 1.43\pi \right) \text{ ou } \left(v = 0 \text{ et } u = \pm 1.43\pi \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\alpha' = \alpha \text{ et } \beta' = \beta \pm 1.43 \frac{\lambda}{b} \right) \text{ ou } \left(\beta' = \beta \text{ et } \alpha' = \alpha \pm 1.43 \frac{\lambda}{a} \right)$$

$I_1 = 0.047I_0$ (Les 4 premiers maxima secondaires situés sur OX et OY)

$$\left(u = 0 \text{ et } v = \pm 2.46\pi \right) \text{ ou } \left(v = 0 \text{ et } u = \pm 2.46\pi \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\alpha' = \alpha \text{ et } \beta' = \beta \pm 2.46 \frac{\lambda}{b} \right) \text{ ou } \left(\beta' = \beta \text{ et } \alpha' = \alpha \pm 2.46 \frac{\lambda}{a} \right)$$

$I_2 = 0.016I_0$ (Les 4 seconds maxima secondaires situés sur OX et OY)

$$(u = 0 \text{ et } v = \pm 3.47\pi; \pm 4.48\pi; \pm 5.48\pi; \pm 6.49\pi) \\ \text{ou } (v = 0 \text{ et } u = \pm 3.47\pi; \pm 4.48\pi; \pm 5.48\pi; \pm 6.49\pi)$$

$$\left(\alpha' = \alpha \text{ et } \beta' = \beta \pm 3.47 \frac{\lambda}{b}; \beta \pm 4.48 \frac{\lambda}{b}; \beta \pm 5.48 \frac{\lambda}{b}; \beta \pm 6.49 \frac{\lambda}{b} \right) \\ \text{ou } \left(\beta' = \beta \text{ et } \alpha' = \alpha \pm 3.47 \frac{\lambda}{a}; \alpha \pm 4.48 \frac{\lambda}{a}; \alpha \pm 5.48 \frac{\lambda}{a}; \alpha \pm 6.49 \frac{\lambda}{a} \right)$$



$I_3 = 0.008I_0, I_4 = 0.005I_0, I_5 = 0.003I_0 \text{ et } I_6 = 0.0024I_0$
Les 4x4 Maxima secondaires suivants situés sur OX et OY

$$(u = \pm 1.43\pi \text{ et } v = \pm 1.43\pi)$$



$$\left(\alpha' = \alpha \pm 1.43 \frac{\lambda}{a} \text{ et } \beta' = \beta \pm 1.43 \frac{\lambda}{b} \right)$$



$I_7 = 0.0022I_0$
4 Maxima secondaires suivants
(situés sur les diagonales)

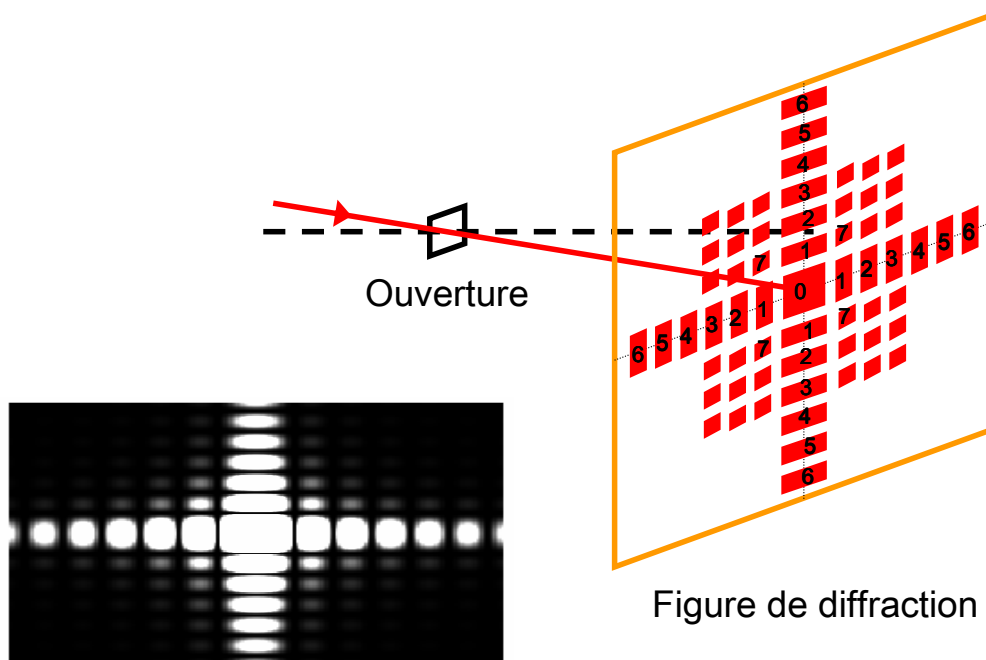


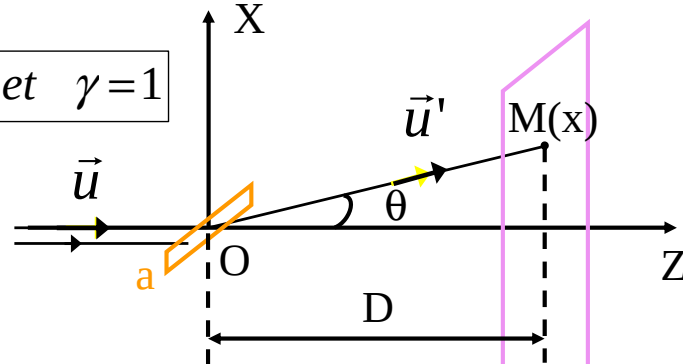
Photo d'une figure de diffraction
par une ouverture rectangulaire

III. 5. Diffraction par une fente rectangulaire

$$\left(b \gg \lambda \Rightarrow \beta' = \beta \pm \text{Cste} \frac{\lambda}{b} \approx \beta \right)$$

Diffraction négligeable
dans la direction OY

$$\vec{u} = \vec{e}_z \Rightarrow \alpha = 0 ; \beta = 0 \text{ et } \gamma = 1$$



$$\vec{u}' = \sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_z \Rightarrow \alpha' = \sin \theta ;$$

$$\beta' = 0 \text{ et } \gamma' = \cos \theta$$

Ecran
d'observation

03/01/2009

Optique 2 : E. Ech-chamikh

19

$$I = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \frac{\sin^2 v}{v^2} = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda} (\alpha - \alpha') \right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda} (\alpha - \alpha') \right)^2} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda} (\beta - \beta') \right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} (\beta - \beta') \right)^2}$$

$$\approx I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda} (\sin \theta) \right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda} (\sin \theta) \right)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\sin^2 x}{x^2} \text{ décroît rapidement} \\ \text{et } I_0 \propto a^2 \end{array} \right\}$$

$$I = I(\theta) \approx I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda} \theta \right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda} \theta \right)^2} \approx I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi a x}{\lambda D} \right)}{\left(\frac{\pi a x}{\lambda D} \right)^2}$$

θ petit

Pour $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$ et $a = 0,1 \text{ mm}$;
le 10^{ème} Min est à $\theta = 3,4^\circ$

03/01/2009

Optique 2 : E. Ech-chamikh

20

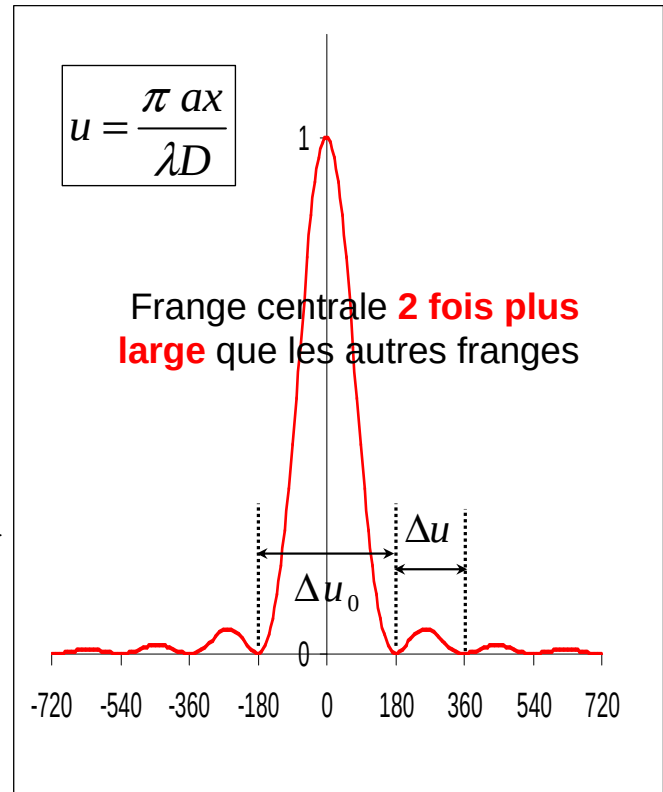
$$I = I(x) \approx I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi ax}{\lambda D}\right)}{\left(\frac{\pi ax}{\lambda D}\right)^2} = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2}$$

Largeur de la frange centrale

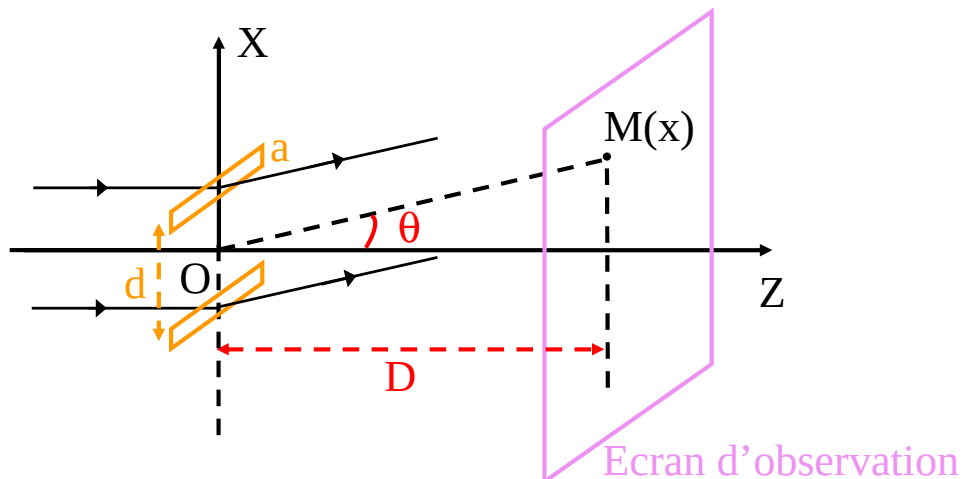
$$\Delta u_0 = \frac{\pi a \Delta x_0}{\lambda D} = 2\pi \Rightarrow \Delta x_0 = 2 \frac{\lambda D}{a}$$

Largeur des autres franges

$$\Delta u = \frac{\pi a \Delta x}{\lambda D} = \pi \Rightarrow \Delta x = \frac{\lambda D}{a}$$



III. 6. Diffraction par deux fentes (Fentes d'Young)



L'amplitude des ondes diffractées par chacune des deux fentes

$$A = \sqrt{I(\theta)} \approx \sqrt{I_0} \frac{\sin\left(\frac{\pi a \theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi a \theta}{\lambda}} \approx \sqrt{I_0} \frac{\sin\left(\frac{\pi ax}{\lambda D}\right)}{\frac{\pi ax}{\lambda D}}$$

Déphasage entre les ondes diffractées par les deux fentes dans une direction θ donnée

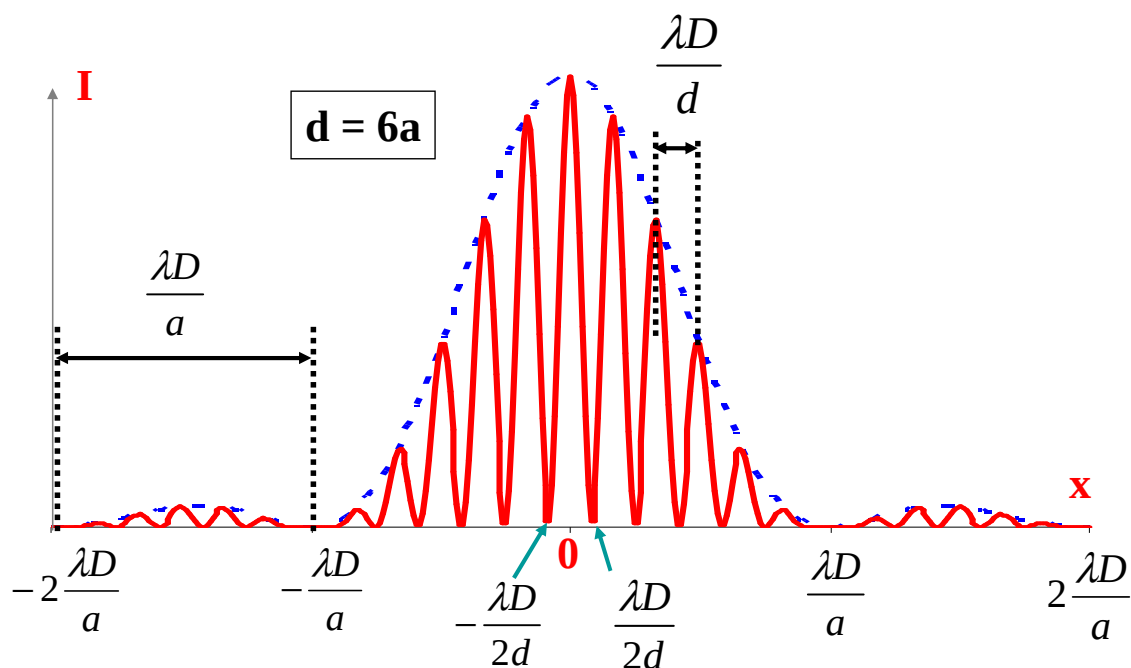
$$\varphi = \frac{2\pi \delta}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} \approx \frac{2\pi \theta d}{\lambda} \approx \frac{2\pi x d}{\lambda D}$$

$$I = A^2 + A^2 + 2\sqrt{A^2 A^2} \cos \varphi = 2A^2 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi x d}{\lambda D} \right) \right)$$

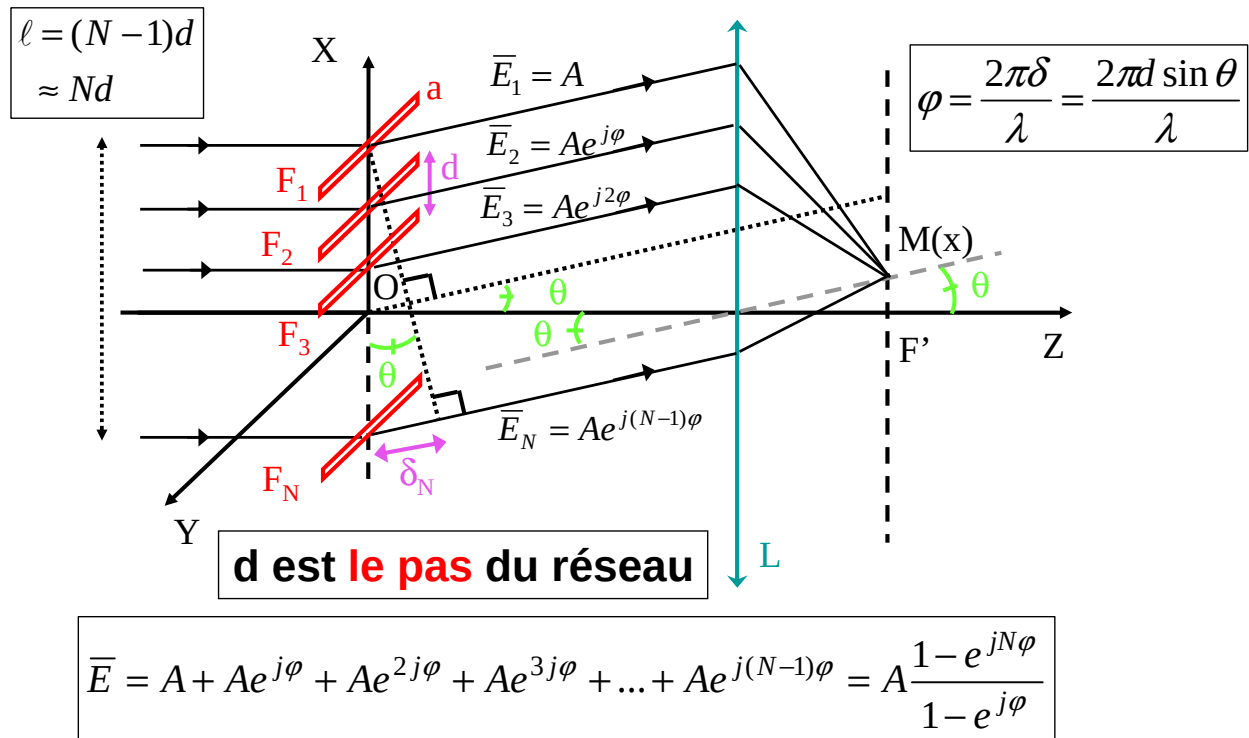
$$= 4A^2 \cos^2 \left(\frac{\pi x d}{\lambda D} \right) = 4I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi a x}{\lambda D} \right)}{\left(\frac{\pi a x}{\lambda D} \right)^2} \cos^2 \left(\frac{\pi x d}{\lambda D} \right)$$

Terme de diffraction

Terme d'interférence



III. 7. Diffraction par un réseau de fentes (Réseau)



03/01/2009

Optique 2 : E. Ech-chamikh

25

$$\bar{E} = A \frac{1 - e^{jN\varphi}}{1 - e^{j\varphi}} \quad \downarrow$$

$$I = |\bar{E}|^2 = \bar{E} \bar{E}^* = A^2 \left(\frac{1 - e^{jN\varphi}}{1 - e^{j\varphi}} \right) \left(\frac{1 - e^{-jN\varphi}}{1 - e^{-j\varphi}} \right) = A^2 \frac{2 - 2 \cos(N\varphi)}{2 - 2 \cos(\varphi)}$$

$$= A^2 \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \approx I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a \theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi a \theta}{\lambda}\right)^2} \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d \sin \theta}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}\right)} = I(\theta)$$

$$A = \sqrt{I(\theta)} \approx \sqrt{I_0} \frac{\sin\left(\frac{\pi a \theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi a \theta}{\lambda}} \quad \uparrow$$

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda}$$

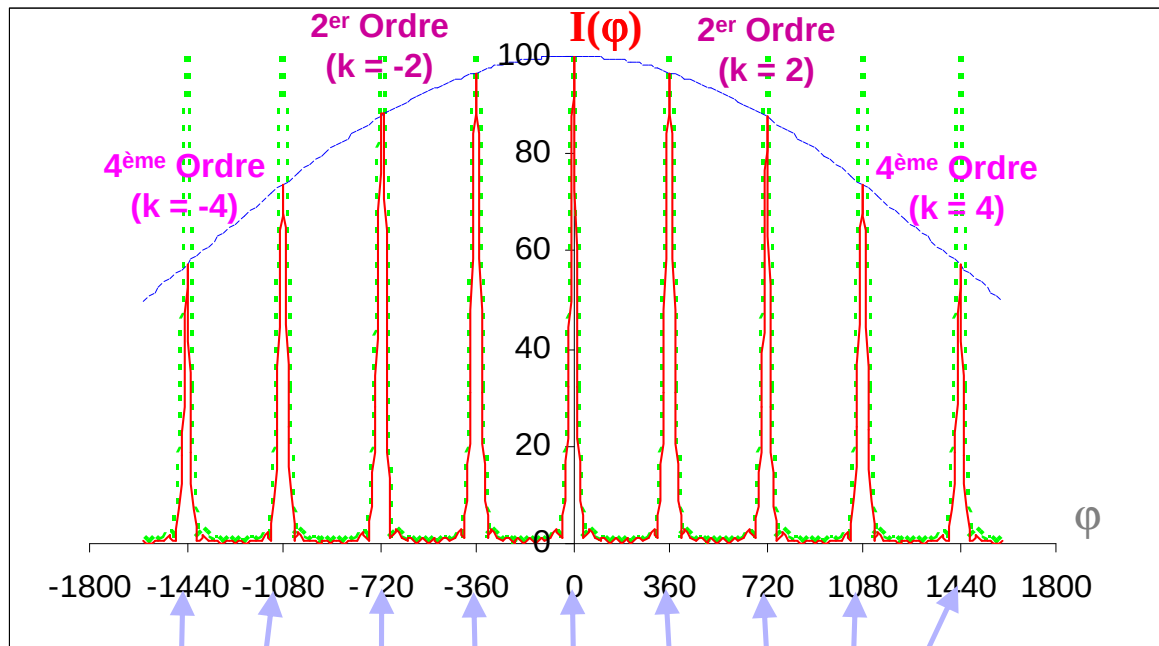
03/01/2009

Optique 2 : E. Ech-chamikh

26

L'intensité du maximum principal est $N^2 I_0$ Ordre Zéro ($k = 0$)

$d = 10a$
et $N = 10$



$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} = 2k\pi \Rightarrow d \sin \theta = k\lambda$$

Maximums

03/01/2009

Optique 2 : E. Ech-chamikh

27

Pour $d = 10\mu\text{m}$ et $\lambda = 0,6\mu\text{m}$

$$d \sin \theta_k = k\lambda \Rightarrow \sin \theta_k = k \frac{\lambda}{d} = k \frac{0,6}{10} = 0,06k$$

$\Rightarrow$ L'ordre 10 est situé dans la direction $\theta_{10} = \text{Arcsin}(0,6) \approx 37^\circ$

$$\text{tg} \theta_k = \frac{x_k}{f'} \Rightarrow x_k = f' \text{tg} \theta_k$$

Position de la tache d'ordre k sur le plan focal image de la lentille

$$\text{tg} \theta_{10} = \frac{x_{10}}{f'} \Rightarrow x_{10} = f' \text{tg} \theta_{10} = 20 * \text{tg}(37^\circ) \approx 15\text{cm}$$

Si $f' = 20\text{cm}$

Position de la tache d'ordre 10

03/01/2009

Optique 2 : E. Ech-chamikh

28

Pour $d = 5\mu\text{m}$ et $\lambda = 0,6\mu\text{m}$

$$d \sin \theta_k = k\lambda \Rightarrow \sin \theta_k = k \frac{\lambda}{d} = k \frac{0,6}{5} = 0,12k$$
$$\Rightarrow \text{L'ordre 10 n'existe plus car } \sin \theta_{10} = 1,2 > 1$$

L'ordre maximum observable est tel que :

$$\sin \theta_k = k \frac{\lambda}{d} = k \frac{0,6}{5} < 1 \Rightarrow k < \frac{5}{0,6} = 8,3 \text{ avec } k \text{ entier}$$

Soit : $k_{\text{Max}} = 8$

La position angulaire de cette tache est telle que :

$$\sin \theta_{\text{Max}} = k_{\text{Max}} \frac{\lambda}{d} = 8 * \frac{0,6}{5} = \frac{4,8}{5} = 0,96 \Rightarrow \theta_{\text{Max}} \approx 74^\circ$$

$$\text{tg } \theta_{\text{Max}} = \frac{x_{\text{Max}}}{f'} \Rightarrow x_{\text{Max}} = f' \text{tg } \theta_{\text{Max}} = 20 * \text{tg}(74^\circ) \approx 70\text{cm} \quad (\text{Si } f' = 20\text{cm})$$

Pour un réseau à $n = 500 \text{ trait/mm}$ (1 trait = 1 fente)

$$n = \frac{N}{\ell} = \frac{N}{Nd} = \frac{1}{d} \Rightarrow d = \frac{1}{n} = \frac{1}{500} = 0,002\text{mm} = 2\mu\text{m}$$

Pour $\lambda = 0,6\mu\text{m}$, l'ordre maximum observable est tel que :

$$\sin \theta_k = k \frac{\lambda}{d} = k \frac{0,6}{2} < 1 \Rightarrow k < \frac{2}{0,6} = 3,3 \text{ avec } k \text{ entier}$$

Soit : $k_{\text{Max}} = 3$

Si la largeur du réseau fait 1cm, le nombre total de fentes est :

$$N = n\ell = 500 * 10 = 1000 \text{ trait}$$

L'intensité du maximum principal est donc :

$$I_M = N^2 I_0 = 10^6 I_0$$

III. 8. Diffraction par d'autres formes d'ouvertures

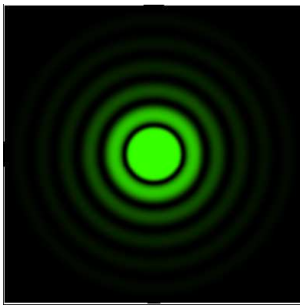


Figure de diffraction par une ouverture **circulaire**
(Voir TD)

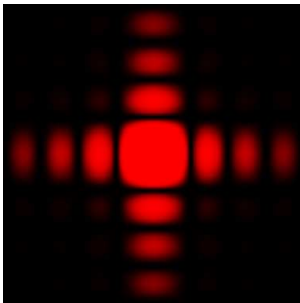


Figure de diffraction par une ouverture **carrée** (cas particulier de l'ouverture rectangulaire)

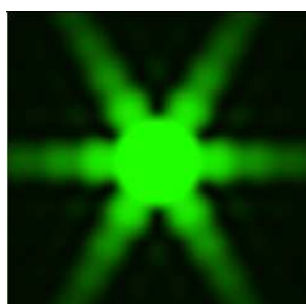


Figure de diffraction par une ouverture **triangulaire** (cas d'un triangle équilatéral)

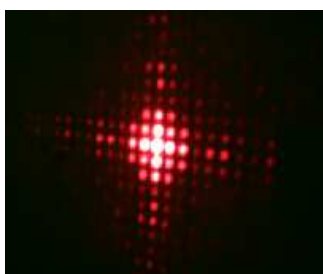


Figure de diffraction par une **grille**